

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ ĐẠI SỐ TỔ HỢP

* Nhận xét:

Giả sử m, n là các số nguyên dương với $m \leq n$ thì

- 1) Số cách viết m trong n chữ số khác nhau vào m vị trí định trước là A_n^m .
- 2) Số cách viết m chữ số khác nhau trong n vị trí định trước là A_n^m (ở $n-m$ vị trí còn lại không thay đổi chữ số).
- 3) Số cách viết m chữ số giống nhau trong n vị trí định trước là $C_n^{n-m} = C_n^m$.
- 4) Cho tập hợp gồm n chữ số, trong đó có chữ số 0, số các số có m chữ số tạo thành từ chúng là $(n-1)A_{n-1}^{m-1}$.

Thực vậy, có $(n-1)$ cách chọn chữ số đứng đầu, sau đó áp dụng 2).

Sau đây là các dạng toán thường gặp.

Dạng 1. Số tạo thành chứa các chữ số định trước.

Cho tập hợp gồm n chữ số, trong đó có chữ số 0, từ chúng viết được bao nhiêu số có m chữ số khác nhau sao cho trong đó có k chữ số định trước (thuộc n chữ số trên) với $k < m \leq n$.

Cách giải: Số tạo thành gồm m vị trí $\overline{a_1 a_2 \dots a_m}$. Gọi tập hợp k chữ số định trước là X . Ta xét hai bài toán nhỏ theo các khả năng của giả thiết về tập hợp X và chữ số 0 như sau:

1) Trong X chứa chữ số 0.

Ta có $(m-1)$ cách chọn vị trí cho số 0; số cách chọn $(k-1)$ chữ số khác 0 thuộc X trong $(m-1)$ vị trí còn lại là A_{m-1}^{k-1} theo 2); số cách chọn $(m-k)$ trong số $(n-k)$ chữ số không thuộc X cho $(m-k)$ vị trí còn lại là A_{n-k}^{m-k} theo 1).

Theo quy tắc nhân, ta được số các số đó là $S = (m-1)A_{m-1}^{k-1}A_{n-k}^{m-k}$.

2) Trong X không chứa chữ số 0.

Ta tính theo các bước:

Bước 1. Tính số các số tạo thành chứa chữ số 0.

Lần lượt có $(m-1)$ cách chọn vị trí cho 0; số cách viết k chữ số thuộc X vào $(m-1)$ vị trí còn lại là A_{m-1}^k theo 2); số cách chọn $(m-k-1)$ trong số $(n-k-1)$ chữ số khác 0 mà không thuộc X vào $(m-k-1)$ vị trí còn lại là A_{n-k-1}^{m-k-1} theo 1).

Theo quy tắc nhân, ta được số các số đó là:

$$S_1 = (m-1)A_{m-1}^k A_{n-k-1}^{m-k-1}$$

Bước 2. Tính số các số tạo thành không chứa chữ số 0.

Số cách viết k chữ số thuộc X trong m vị trí là A_m^k theo 2); số cách chọn $(m-k)$ trong số $(n-k-1)$ chữ số khác 0 mà không thuộc X cho $(m-k)$ vị trí còn lại là A_{n-k-1}^{m-k} theo 1).

Theo quy tắc nhân, ta được số các số đó là $S_2 = A_m^k A_{n-k-1}^{m-k}$.

Bước 3. Theo quy tắc cộng, ta được số các số tạo thành thỏa mãn bài toán là: $S = S_1 + S_2$.

Dạng 2. Số tạo thành không chứa hai chữ số định trước cạnh nhau.

Cho tập hợp gồm n chữ số, từ chúng viết được bao nhiêu số m ($m \leq n$) chữ số khác nhau mà trong đó có hai chữ số định trước nào đó không đứng cạnh nhau.

Cách giải. Số tạo thành có dạng $\overline{a_1 a_2 \dots a_m}$ và 2 chữ số định trước là x, y (thuộc n chữ số đã cho). Ta xét ba bài toán nhỏ theo các khả năng của giả thiết về chữ số x, y và chữ số 0 như sau:

1) Nếu n chữ số đã cho chứa chữ số 0 và hai chữ số định trước x, y khác 0.

Bước 1. Tính số các số tạo thành một cách bất kì: có $n-1$ cách chọn vị trí cho chữ số 0 và áp dụng 2) được số các số đó là $S_1 = (n-1)A_{n-1}^{m-1}$.

Bước 2. Tính số các số có hai chữ số x, y cạnh nhau theo thứ tự $\overline{xy}$ và $\overline{yx}$.

TH1. $\overline{a_1 a_2} = \overline{xy}$. Khi đó mỗi số $\overline{a_3 \dots a_m}$ ứng với một chỉnh hợp chập $(m-2)$ của $(n-2)$ chữ số khác x, y . Số các số đó là $S_2 = A_{n-2}^{m-2}$, theo 1).

TH2. $\overline{a_1 a_2} \neq \overline{xy}$. Lần lượt ta có: $(n-3)$ cách chọn chữ số cho a_1 khác 0, x, y ; $(m-2)$ cách chọn vị trí cho $\overline{xy}$; số cách chọn $(m-3)$ trong $(n-3)$ chữ số còn lại khác a_1, x, y cho $(m-3)$ vị trí còn lại là A_{n-3}^{m-3} theo 1). Theo quy tắc nhân, số các số đó là:

$$S_3 = (n-3)(m-2)A_{n-3}^{m-3}$$

Từ hai trường hợp trên, ta được số các số có chứa $\overline{xy}$ là $S_2 + S_3$. Tương tự có $S_2 + S_3$ số chứa $\overline{yx}$.

Bước 3. Vậy số các số thỏa mãn bài toán là:

$$S = S_1 - 2(S_2 + S_3)$$

2) Nếu n chữ số đã cho chứa chữ số 0 và một trong hai chữ số định trước bằng 0.

Bạn đọc tự giải theo các bước sau:

Bước 1. Tính số các số tạo thành một cách bất kì: $S_1 = (n-1)A_{n-1}^{m-1}$.

Bước 2. Tính số các số có x, y cạnh nhau:

$$S_2 = (2m-3)A_{n-2}^{m-2},$$

Số các số thỏa mãn bài toán là $S = S_1 - S_2$.

3) n chữ số đã cho không có chữ số 0.

Bạn đọc tự giải được $S = A_n^m - 2(m-1)A_{n-2}^{m-2}$

Dạng 3. Số tạo thành chứa chữ số lặp lại.

Trước hết ta xét ví dụ cụ thể:

Ví dụ: Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số sao cho trong đó có một chữ số xuất hiện ba lần, một chữ số khác xuất hiện hai lần và một chữ số khác với hai chữ số trên.

Lời giải. Nếu kể cả trường hợp chữ số 0 đứng đầu, lần lượt:

Có 10 cách chọn chữ số xuất hiện 3 lần và có C_6^3 cách chọn 3 trong 6 vị trí cho chữ số đó. Sau đó có 9 cách chọn chữ số xuất hiện 2 lần (khác với chữ số trên) và có C_3^2 cách chọn 2 trong 3 vị trí còn lại cho chữ số đó. Tiếp theo có 8 cách chọn chữ số cho vị trí còn lại cuối cùng. Ta được số các số đó là $S = 10.C_6^3.9C_3^2.8 = 720.C_6^3.C_3^2$.

Vì vai trò của 10 chữ số 0, 1, ..., 9 như nhau nên số các số có chữ số đứng đầu khác 0 thỏa mãn bài toán là $9S/10 = 648.C_6^3.C_3^2$.

* **Bài toán chia khóa:** Cho tập hợp gồm n chữ số, từ chúng viết được bao nhiêu số có m chữ số sao cho trong đó có một chữ số xuất hiện k lần, một chữ số khác xuất hiện q lần với $k+q = m$.

Cách giải. Ta xét hai bài toán nhỏ dưới đây

1) Nếu n chữ số đã cho có chữ số 0.

Bước 1. Nếu kể cả trường hợp chữ số 0 đứng đầu, ta thấy:

Có n cách chọn chữ số xuất hiện k lần và có C_m^k cách chọn k trong m vị trí cho chữ số đó. Sau đó có $n-1$ cách chọn chữ số xuất hiện q lần (khác với chữ số trên) và có C_{m-k}^q cách chọn q trong $m-k$ vị trí còn lại cho chữ số đó.

Theo quy tắc nhân, ta tính được số các số đó là: $S = n.C_m^k (n-1).C_{m-k}^q$.

Bước 2. Vì vai trò của n chữ số như nhau nên số các số có chữ số đứng đầu khác 0 thỏa mãn bài toán là: $\frac{(n-1)S}{n}$.

2) n chữ số đã cho không có chữ số 0.

Bạn đọc tự giải được $S = n.C_m^k (n-1)C_{m-k}^q$.

Ta có thể mở rộng bài toán tổng quát cho t chữ số trong đó mỗi chữ số xuất hiện lần lượt $k_1, k_2, \dots, k_t$ lần.

BÀI TẬP

1. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 35400 và có 5 chữ số khác nhau.
2. Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Từ chúng viết được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau sao cho số tạo thành là một số chẵn.
3. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Từ chúng viết được bao nhiêu số có 8 chữ số khác nhau sao cho trong đó có chữ số 1 đứng phía trước chữ số 2.